Mecánica Clásica I

Víctor López Pardo

2018-2019

Índice general

Tema 1

Mecánica de Newton

Consideramos la posición de una partícula $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Si la partícula está en movimiento podemos definir la posición como una función del tiempo $\vec{r}(t)$. La velocidad de dicha partícula será[1]

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Además siendo $\vec{\tau}$ el vector tangente a la trayectoria y $\vec{n}$ el normal, tenemos que $\vec{v} = v\vec{\tau}$ por lo que

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - v\frac{v}{R}\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Llamamos aceleración tangencial $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ y aceleración normal $a_n = -\dfrac{v^2}{R}$. Así

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$$

Definimos el momento lineal o cantidad de movimiento como $\vec{p} = m\vec{v}$.

1.1. Leyes de Newton, sistemas inerciales y transformaciones de Galileo

Las tres **leyes de Newton** son

1. Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme en ausencia de fuerzas

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{v} = cte.$$

[1]para cualquier función f denotaremos $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$ o $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ según el contexto

2. La fuerza es la derivada del momento lineal respecto al tiempo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{v}{dt} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

3. Para toda fuerza existe una fuerza del mismo módulo y dirección pero sentido contrario

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Un sistema inercial es aquel donde se verifican las leyes de Newton. Las coordenadas de los sistemas inerciales se tranforman mediante las transformaciones de Galileo. Siendo $\vec{u} = cte.$ la velocidad del sistema de referencia inercial S' respecto a otro S. Las posiciones

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{u}t$$

las velocidades, al derivar

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \frac{d(\vec{u}t)}{dt} \implies \vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}$$

y las aceleraciones, al derivar nuevamente

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v'}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \implies \vec{a} = \vec{a'}$$

Con lo cual las acelraciones son invariantes. Esto lleva al principio de relatividad de Galileo que afirma que todas las leyes mecánicas con invariantes frente a las transformaciones de Galileo. En palabras de Galileo Galilei:

> «Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores... colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma... haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro.... Las gotas caerán... en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire... las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si cansaran de seguir el curso del barco...»

Más tarde se demostró que el principio de Galileo sólo es aplicable a la física clásica pues a grandes velocidades y masas es necesario recurrir a la relatividad de Einstein.

1.2. Teoremas de conservación

El primer teorema de conservación ya lo conocemos pues es un caso particular de la segunda ley de Newton, es equivalente a la primera ley. El teorema de conservación del momento lineal:

> El momento lineal se conserva en ausencia de fuerzas:
>
> $$\vec{F} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \implies \vec{p} = m\vec{v} = cte.$$

Definimos ahora el momento angular como la cantidad de movimiento respecto a un punto A como $\vec{L} = (\vec{R} - \vec{A}) \times \vec{p} = \vec{d} \times \vec{p}$ donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{A}$, aunque habitualmente se considera el momento angular respecto al origen, por lo que se usa indistintamente $\vec{r}$ y $\vec{R}$. También se puede definir el momento de una fuerza o torque como la fuerza respecto a un punto, que será

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Donde el primer término es nulo pues los vectores son paralelos, con lo cual $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$. El teorema de conservación del momento angular:

El momento angular se conserva en ausencia de momentos de fuerzas

$$\vec{M} = 0 \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \implies \vec{L} = cte.$$

Conviene destacar que $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ puede darse por tres motivos: $\vec{r} = 0$, $\vec{F} = 0$ o que $\vec{r}$ sea paralelo a $\vec{F}$. En el caso de la fuerza gravitatoria $\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$, por lo que $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ y $\vec{L}$ se conserva.

Se define el trabajo W como la energía necesaria para desplazar un cuerpo de un punto A a un punto B por determinada trayectoria a través de una fuerza $\vec{F}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

El trabajo se puede ver como una diferencia de energía, así

$$W_{AB} = \int_A^B \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = \int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_A^B mv \cdot dv = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B$$

Entonces se define $T = \frac{1}{2}mv^2$ como la energía cinética, pues es la debida al movimiento. Podemos decir que

$$W_{AB} = T_B - T_A$$

Ahora bien, hemos dicho que el trabajo se define sobre una trayectoria, si el trabajo es el mismo sobre cualquier trayectoria se dice que la fuerza $\vec{F}$ es **conservativa**, lo que implica que el trabajo sobre una trayectoria cerrada es nulo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Si una fuerza es conservativa, deriva del opuesto del gradiente de un **potencial escalar**:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

Si una fuerza es conservativa, es **irrotacional**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V) = \vec{0}$$

Las fuerzas conservativas permiten dar el trabajo como

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V_A - V_B$$

Entonces a V se le llama energía potencial, y como sabemos que $W_{AB} = T_B - T_A = V_A - V_B$ tenemos que

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

Esta suma es constante para cualquier par de puntos A y B, entonces le llamaremos a $E = T + V$ energía total o energía mecánica.

> La energía mecánica se conserva si las fuerzas son conservativas
>
> $$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \implies E = T + V = cte.$$

1.2.1. Estudio energético del movimiento

En muchos casos es muy complicado llegar a resolver la ecuación del movimiento de un sistema, pero cuando tiene una sola dimensión, la conservación de la energía nos permite hacer un estudio cualitativo del movimiento. Sabemos que $E = T + V$ se conserva si solo intervienen fuerzas conservativas, así que se conservará:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x)$$

Si en el instante inicial $\dot{x}(0) = v_0$ y $x(0) = x_0$ es sencillo ver que la energía será para todo t:

$$E = \frac{1}{2} m{v_0}^2 + V(x_0)$$

Por lo que las regiones donde una partícula tiene permitido moverse son aquellas para las que:

$$V(x) \leq \frac{1}{2} m{v_0}^2 + V(x_0)$$

Que sólo dependen de v_0 y x_0, además tiene que verificarse que la región donde puede estar la partícula es continua y contiene a x_0, es decir, la partícula no puede "teletransportarse". Las zonas donde la partícula no tiene permitido estar son las conocidas como **barreras de potencial**. Por último, sabiendo que $V(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}$ sabemos que la fuerza será siempre en la dirección hacia donde decrece el potencial, por lo que podemos saber qué movimiento tendrá la partícula de manera cualitativa.

1.3. Ejemplos de integración de las leyes de Newton

Vamos a resolver la ecuación del movimiento de Newton para diferentes tipos de fuerzas

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

Sin pérdida de generalidad trabajaremos con fuerzas y posiciones en una dimensión, así $\vec{r} \to x$ y $\vec{F} \to F$. La ecuación de Newton será

$$m\ddot{x} = F(r, \dot{r}, t)$$

1.3.1. Fuerzas dependientes del tiempo

$$m\ddot{x} = F(t)$$

Esta es una ecuación ordinaria de segundo orden:

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \implies \int_{v_0}^{v} m dv = \int_0^t F(t')dt' \implies m(v - v_0) = \int_0^t F(t')dt'$$

de donde sacamos que

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t')dt' \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \left[v_0 + \frac{1}{m}\int_0^{t'} F(t'')dt''\right] dt'$$

Y finalmente

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t \int_0^{t'} F(t'')dt''dt'$$

Por ejemplo para la caída libre, la fuerza de la gravedad se puede aproximar a $F = -mg$ y considerando la variable y:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{m}\int_0^t \int_0^{t'} mgdt''dt' \implies y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

1.3.2. Fuerzas dependientes de la posición

$$m\ddot{x} = F(x)$$

En este caso la fuerza es conservativa porque $F = -\dfrac{dV}{dx}$, por lo que $V = -\int F dx$. Además la energía se conserva.

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V \implies v = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}} \implies \frac{v}{\sqrt{E - V}} = \sqrt{\frac{2}{m}}$$

Con lo que, como $v = \dfrac{dx}{dt}$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{m}}dt \implies \Phi(x) = \Phi(x_0) + \sqrt{\frac{2}{m}}t$$

Entonces

$$x(t) = \Phi^{-1}\left(\Phi(x_0) + \sqrt{\frac{2}{m}}t\right) \tag{1.1}$$

Un ejemplo de fuerza dependiente de la posición es la **ley de Hooke**:

$$F = -kx$$

Para resolver vamos a calcular V

$$V = -\int F(x)dx = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

Entonces tenemos que $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ y tenemos que resolver

$$\Phi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{E-V}} = \int \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{2}{k}} \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)$$

Y ahora tenemos que

$$\Phi^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

Que al introducir en la ecuación (1.1) sustituyendo $E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k{x_0}^2$, obtenemos:

$$x(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

Donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y A_0 y θ_0 son constantes que dependen de las condiciones iniciales

$$A_0 = \sqrt{\frac{{v_0}^2}{\omega^2} + {x_0}^2} \quad \text{y} \quad \theta_0 = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{\omega^2 {x_0}^2}{{v_0}^2 + \omega^2 {x_0}^2}}$$

Por ejemplo para el caso particular de $v_0 = 0$, tenemos que $A_0 = x_0$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, por lo que, como $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, el movimiento quedaría

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

1.3.3. Fuerzas dependientes de la velocidad

$$m\ddot{x} = F(\dot{x})$$

Hacemos el cambio $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ de manera que

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \implies \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \int_0^t \frac{dt}{m} \implies \Gamma(v) = \Gamma(v_0) + \frac{t}{m}$$

Por lo que obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma^{-1}(\Gamma(v_0) + \frac{t}{m}) \implies \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \Gamma^{-1}(\Gamma(v_0) + \frac{t'}{m})dt'$$

Y finalmente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \Gamma^{-1}(\Gamma(v_0) + \frac{t'}{m})dt' \tag{1.2}$$

Un ejemplo sería la fuerza de rozamiento entre sólidos y fluidos, la **fuerza viscosa**:

$$F = -bv$$

Calculamos

$$\Gamma(v) = \int \frac{dv}{F(v)} = \int \frac{dv}{-bv} = -\frac{1}{b}\ln v$$

Y evidentemente

$$\Gamma^{-1}(v) = e^{-bv}$$

Por lo que usando (1.2), la posición será

$$x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-b\left(-\frac{1}{b}\ln v_0 + \frac{t'}{m}\right)} dt'$$

Con lo que

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$$

Siendo $\gamma = \dfrac{m}{b}$.

> **Nota**: estos tres ejemplos no son técnicas para resolver problemas, son ejemplos de procedimientos; cada problema requiere de su estudio individual y no aporta ningún interés memorizarse las fórmulas aquí proporcionadas.

1.4. Sistemas no inerciales: fuerzas centrífugas y de Coriolis

Las leyes de Newton no son aplicables a sistemas no inerciales. Supongamos un sistema S' que rota con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. El vector posición a un punto del sistema respecto a nuestro sistema S será $\vec{r}$, pero tras un intervalo de tiempo Δt dicho punto se habrá desplazado $\Delta\vec{r}$ con $\|\Delta\vec{r}\| = r' \operatorname{sen}\theta\omega\Delta t$ siendo θ el ángulo polar. La dirección de $\Delta\vec{r}$ será perpendicular a $\vec{r'}$ y a $\vec{\omega}$, de hecho, $\Delta\vec{r} = (\vec{\omega}\times\vec{r'})\Delta t$. Ahora

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r'}$$

Que si le sumamos la velocidad propia que puede tener la partícula en S', obtenemos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r'}} + \vec{\omega}\times\vec{r'}$$

Lo que es aplicable para cualquier vector: $\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{A'}} + \vec{\omega}\times\vec{A'}$ Si además el sistema tiene un origen móvil O'

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r'}} + \dot{\vec{r}}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r'}} \tag{1.3}$$

Donde el término $\dot{\vec{r}}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r'}$ es la conocida como velocidad de arrastre. Para la aceleración tenemos que derivar la velocidad

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r'}} + \dot{\vec{r}}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) \implies \ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r'}}}{dt} + \ddot{\vec{r}}_{O'} + \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}$$

Analizando el primer término:

$$\frac{d\dot{\vec{r'}}}{dt} = \frac{d(\dot{r}'\hat{r}')}{dt} = \frac{d\dot{r}'}{dt}\hat{r}' + \dot{r}'\frac{d\hat{r}'}{dt} = \ddot{r}'\hat{r}' + \dot{r}'\vec{\omega} \times \hat{r}' = \ddot{\vec{r'}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}}$$

Y el último:

$$\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r'})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \frac{d(r'\hat{r}')}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \left(\frac{dr'}{dt}\hat{r}' + r'\frac{d\hat{r}'}{dt}\right) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \left(\dot{\vec{r'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$$

Con lo cual llegamos a

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r'}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}} + \ddot{\vec{r}}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$$

Así

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r'}} + \ddot{\vec{r}}_{O'} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)} \tag{1.4}$$

Donde $2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}}$ es la aceleración de Coriolis; $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'}$, la aceleración acimutal, y $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$, la aceleración centrífuga.

De (1.4) extraemos la ley de Newton para sistemas no inerciales:

$$m\ddot{\vec{r'}} = \vec{F} - m\left(\ddot{\vec{r}}_{O'} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)\right)$$

Donden aparecen diferentes fuerzas virtuales:

- Fuerza acimutal o fuerza de Euler:
  $$\vec{F}_a = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'}$$
  Que será nula cuando $\dot{\vec{\omega}}$ y $\vec{r'}$ sean paralelos, cuando $\vec{r'}$ sea nulo o cuando $\vec{\omega} = cte$.

- Fuerza centrífuga:
  $$\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$$
  La cual se puede reducir, sabiendo que $\vec{r'} = \vec{z} + \vec{\rho}$, a
  $$\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = m\omega^2\vec{\rho} = m\frac{v^2}{\rho}\hat{\rho}$$
  Que es el opuesto a la fuerza normal pues $\rho = R$ y $\hat{\rho} = \hat{n}$.

- Fuerza de Coriolis:
  $$\vec{F}_C = -m2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r'}}$$
  Una fuerza que es nula cuando $\dot{\vec{r'}} = \vec{v'} = \vec{0}$, esto es, sólo se manifiesta cuando el móvil se mueve en el sistema de referencia S'.

Tema 2

Ecuaciones de Lagrange

2.1. Ligaduras y coordenadas generalizadas

Una **ligadura** es una condición o restricción del movimiento como un péndulo colgado del origen ($\|\vec{r}\| = l$), una partícula en un plano ($Ax + By + Cz + D = 0$), un sólido rígido ($\vec{r}_i - \vec{r}_j = cte.$) o un gas en una caja ($0 \leq x \leq L$).

Las ligaduras pueden clasificarse:

- Las ligaduras **holónomas** se dan, si existe una ecuación que relacione las coordenadas de las diferentes partículas de nuestro sistema

  $$\exists f : f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, t) = 0 i = 1, 2, \cdots, N$$

  Donde N es el número de partículas que tienen $3N$ coordenadas y K ligaduras $f_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, t) = 0$ con $j = 1, 2, \cdots, K$. Los grados de libertad son el número de coordenadas independientes necesarias para determinar de forma unívoca la configuración del sistema

  $$n = 3N - K$$

  Una ligadura holónoma es la de la partícula en el plano, por ejemplo.

- Las ligaduras **no holónomas** se dan, si no existe tal ecuación, por lo que no es posible eliminar los grados de libertad. Pueden ser lineales o no lineales. Un ejemplo es el gas encerrado, donde no existe una ecuación si no dos inecuaciones.

Además de esto, las ligaduras pueden ser **reónomas** o **esclerónomas** si dependen o no del tiempo, respectivamente.

Las **coordenadas generalizadas** $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ son un conjunto arbitrario de parámetros que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema con un número finito de grados de libertad. Más formalmente, las coordenadas generalizadas se definen como un sistema de coordenadas curvilíneas sobre la variedad de configuración de un sistema físico como por ejemplo el espacio de configuración o el espacio de fases de la mecánica clásica. A las coordenadas generalizadas mínimas necesarias para definir el estado del sistema se conoce como **coordenadas independientes** $\{q_k\}_{k=1}^n$ y su número es el número de grados de libertad.

$$\left\{\begin{array}{c} q_k = q_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, t) \\ f_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, t) = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} i = 1, 2, \cdots, N \\ j = 1, 2, \cdots, K \\ k = 1, 2, \cdots, n \end{array}$$

Por lo que tenemos un sistema de $3N$ ecuaciones con $3N$ incógnitas, por lo que podremos calcular las variables de la posición en función de las ligaduras y las coordenadas generalizadas.

El espacio de configuración es el constituido por las coordenadas generalizadas cuya dimensión es $n = 3N - K$. Si q es una coordenada generalizada a $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ se le denomina velocidad generalizada. Al espacio de las $\{q_k, \dot{q}_k\}$ se le llama diagrama de fase.

2.2. Principio de D'Alembert y ecuaciones de Lagrange

El **principio de D'Alambert** o principio de los trabajos virtuales, es un establece que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo forman un sistema de fuerzas en equilibrio. Un desplazamiento virtual $(d\vec{r})$ es un desplazamiento infinitesimal compatible con las ligaduras.

2.2.1. Sistemas en equilibrio

Si el sistema está en equilibrio, para una partícula i:

$$\vec{F}_i = \vec{0} \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

Siendo $\vec{F}_i$ la suma de todas las fuerzas que actúan sobre i. Como la suma es nula, es evidente que:

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{0}$$

Descomponemos $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$, donde $\vec{F}_i^{(a)}$ son las fuerzas aplicadas, externas al sistema y $\vec{f}_i$ son las fuerzas de ligadura. Llegamos a que:

$$(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i = \vec{0}$$

Que se cumple para todas las partículas por lo que:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{F}_i^{(a)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i\right] = \vec{0}$$

Y como el desplazamiento no se puede realizar en la dirección de la ligadura, es decir, $\vec{f}_i \cdot \partial\vec{r}_i$, llegamos al principio de D'Alembert para sistemas en equilibrio:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot d\vec{r}_i = \vec{0}}$$

Teniendo las ecuaciones de las coordenadas $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t)$ con $j = 1, 2, \cdots, n$ los desplazamientos serán:

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

Donde por ser los desplazamientos virtuales $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{0}$, por lo que el principio de D'Alembert se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{n} dq_j \left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] = \vec{0}$$

Con lo que para cada q_j, pues los dq_j son linealmente independientes, ha de verificarse:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{0}$$

Donde a Q_j se le llama fuerza generalizada asociada a q_j.

2.2.2. Sistemas en movimiento

Ahora se verifica que:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

Por lo que procederemos igual que antes pero con $\vec{F}_i - \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{0}$ y nuevamente descomponiendo $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \vec{0} \implies \sum_{j=1}^{n} dq_j Q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j$$

Y como:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{n} dq_j \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]$$

Que por la derivada del producto sabemos:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

Donde, como $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$, tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j}$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, por lo que:

$$\sum_{j=1}^{n} dq_j Q_j = \sum_{j=1}^{n} dq_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right]$$

Por lo que podemos concluir que la solución exige:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j}$$

Siendo esta la **ecuación de Euler**.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas:

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(a)}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}V_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Por lo que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=0\implies\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)=0\implies\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial q_j}=0$$

Ahora, sabiendo que $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial q_j}=0$$

Por lo que vamos a definir el **lagrangiano** L como:

$$L=T-V$$

Y la ecuación queda:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0}$$

Que es la **ecuación de Euler-Lagrange**.

2.3. Simetrías y leyes de conservación

Vamos a definir el lagrangiano en una dimensión en coordenadas cartesianas:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$$

Donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}=p_x$$

Siendo p_x el momento lineal, de donde extraemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0\implies\frac{dp_x}{dt}+\frac{\partial V}{\partial x}=0\implies\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x$$

Por lo que podemos definir para cualquier coordenada q_j el momento generalizado asociado a q_j como:

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

p_j es función $p_j(q_j, \dot{q}_j, t)$ y, en general, no tiene dimensiones de momento lineal.

Partiendo de la ecuación del movimiento de Euler-Lagrange para q_j:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \implies \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Ahora bien, si L no es función de q_j, es decir $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, es evidente:

$$\frac{dp_j}{dt} = 0 \implies p_j = cte.$$

Por lo que p_j se conserva y q_j es una variable cíclica.

Teorema de Noether
Una simetría se puede definir como una transformación de coordenadas que deja invariable el sistema, por lo que es equivalente a una ley de conservación.

A continuación veremos diversos ejemplos:

- **Invarianza temporal**. Tenemos que el lagrangiano es función $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, lo que al diferenciar:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j\right]$$

Por lo que la derivada total:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]$$

Por lo que tenemos la **función de Hamilton**:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j - L\right]$$

Y el **hamiltoniano** H será:

$$H = \sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j - L \implies \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Por lo que si el lagrangiano no es función explícita del tiempo, el hamiltoniano se conserva. Si V es función sólo $V(q_j)$ y $T = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$, y además las ligaduras no dependen del tiempo, el hamiltoniano $H = E = T + V$.

- **Homogeneidad espacial**. Como es evidente, si el sistema presenta homogeneidad en el espacio eso implica que no depende de la posición:

$$\vec{\nabla}L = 0 \implies \vec{p} = cte.$$

A veces el sistema puede ser homogéneo sólo en alguna coordenada por lo que serán dichas componentes constantes, e.g. $p_x = cte.$

- **Isotropía espacial**. Si no hay dependencia angular en el lagrangiano, se conserva el momento angular $\vec{L}$. A veces ocurre que hay independencia en ciertos ángulos, por ejemplo cuando hay simetría axial, es entonces cuando se conserva sólo el momento en un ángulo, e.g. $p_\varphi = cte$.

También existen otras simetrías como la **isotropía espacio-temporal** que implica una conservación del **espín**; la **invarianza de Poincaré**, una conservación de la **masa-energía**, o la **invarianza de Gauge**, una conservación de la **carga**.

2.3.1. Potencial efectivo

La existencia de isotropía de ciertos sistemas permite definir el llamado **potencial efectivo** V_{ef} que engloba el potencial y las fuerzas de ligadura angulares, se define como:

$$\boxed{V_{ef}(\vec{r}) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r})}$$

Es la parte de la energía mecánica que no depende de la velocidad. En problemas con simetría axial suele ser:

$$V_{ef}(\rho) = \frac{{p_\varphi}^2}{2m\rho^2} + V(\rho)$$

Este potencial resulta muy útil para estudiar el movimiento de manera análoga a los problemas monodimensionales considerando los valores de la energía y los de L o p_φ. Además, si el potencial[1] tiene un mínimo, es decir, una posición de equilibrio x_0, se puede aproximar en segundo orden por Taylor lo que nos da:

$$V_{ef}(x) \approx V_{ef}(x_0) + \cancelto{0}{\frac{dV_{ef}(x_0)}{dx}(x - x_0)} + \frac{1}{2!}\frac{d^2V_{ef}(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2$$

Sabiendo que el potencial elástico es $V = \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2$, podemos hacer una analogía para calcular la **frecuencia de pequeñas oscilaciones** pues $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{d^2V_{ef}(x_0)}{dx^2}}{m}}$$

[1] suponemos que hemos conseguido expresar el potencial como una función unidimensional.

Tema 3

Oscilaciones lineales

3.1. Oscilador armónico simple

La **ley de Hooke**:

$$F = -kx$$

donde x es el desplazamiento respecto al equilibrio es una sencilla ecuación diferencial si empleamos la segunda ley de Newton $F = m\ddot{x}$:

$$m\ddot{x} = -kx \implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Donde suponiendo una solución de la forma $x = Ae^{\lambda t}$ y siendo $k > 0$, tenemos que:

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \frac{k}{m}Ae^{\lambda t} = 0 \implies \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Pues A se supone distinto de 0, ya que de otra manera tendríamos la solución trivial. De la ecuación obtenemos:

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

Donde es evidente que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, entonces la solución será:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Como buscamos una solución real vamos a considerar $A = \frac{C}{2}e^{-i\delta}$ y $B = \frac{C}{2}e^{i\delta}$ para obtener[1]:

$$\boxed{x(t) = C\cos(\omega t - \delta)}$$

Donde C y δ son constantes que determinarán las condiciones de contorno, por ejemplo $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$ nos da la solución $x(t) = x_0 \cos\omega t$ que es una solución conocida (**1.3.2**).

[1] $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

3.2. Oscilaciones amortiguadas y forzadas. Resonancia

La ecuación de la ley de Hooke puede complicarse si existe algún mecanismo que amortigüe o frene el movimiento, como una fuerza proporcional a la velocidad:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \implies \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Sabiendo que $b > 0$, resolveremos nuevamente suponiendo $x = Ae^{\lambda t}$, por lo que:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \implies \lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Donde vamos a definir $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ pues es la frecuencia sin rozamiento, por lo que la solución será:

$$x(t) = Ae^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}\right)t} = Ae^{-\gamma t}e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}t} + Be^{-\gamma t}e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}t}$$

Donde hay tres casos dependiendo de la relación entre γ y ω_0.

Caso I: $\gamma < \omega_0$

El caso es similar al oscilador armónico simple, pues si definimos $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2} = i\sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2} = i\omega_1$ y como antes $A = \dfrac{C}{2}e^{-i\delta_1}$ y $B = \dfrac{C}{2}e^{i\delta_1}$, tenemos:

$$\boxed{x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t - \delta_1)}$$

Que es el **oscilador amortiguado** o infraamortiguado, donde la posición oscilará sinusoidalmente pero cada vez con menor amplitud, la amplitud decrecerá exponencialmente.

Caso II: $\gamma = \omega_0$

Si $\gamma = \omega_0$ tenemos que $\lambda = -\gamma$ que es una solución doble, por lo que la solución es:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

En este caso el móvil irá rápidamente a la posición de equilibrio sin oscilar, es el caso en el que el móvil llega más rápido al estado de equilibrio estático. Es por ello que a este caso se le llama **caso crítico** y al valor de $\gamma = \omega_0$ se le llama **amortiguamiento crítico**.

Caso III: $\gamma > \omega_0$

En este caso $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}$ es real por lo que no hay oscilaciones:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}t} + Be^{-\gamma t}e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0{}^2}t}$$

Tenemos un **oscilador sobreamortiguado**.

La ley de Hooke puede tener además un término externo, una fuerza externa que dependa del tiempo:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F(t) \implies \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F(t)$$

Vamos además a suponer que la fuerza es oscilatoria $F(t) = F_0 \cos\omega t$ por lo que definiendo los mismos parámetros de antes y $F_0 = mf_0$ llegamos a:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = f_0 \cos\omega t$$

La solución de dicha ecuación es la solución de la homogénea sumada a una solución particular. Dicha solución particular sería lógico que fuese un seno o coseno con la misma frecuencia. Probaremos $x_p(t) = B\cos(\omega t - \delta)$:

$$-\omega^2 B\cos(\omega t - \delta) - 2\gamma\omega B \operatorname{sen}(\omega t - \delta) + {\omega_0}^2 B\cos(\omega t - \delta) = f_0 \cos\omega t$$

Sabiendo que $\cos(\omega t - \delta) = \cos\omega t \cos\delta + \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\delta$ y $\operatorname{sen}(\omega t - \delta) = \operatorname{sen}\omega t\cos\delta - \cos\omega t \operatorname{sen}\delta$ podemos agrupar:

$$\left[\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right) B\cos\delta + 2\gamma\omega B \operatorname{sen}\delta - f_0\right]\cos\omega t + \left[\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right) B \operatorname{sen}\delta - 2\gamma\omega B\cos\delta\right]\operatorname{sen}\omega t = 0$$

Que como ni $\cos\omega t$ ni $\operatorname{sen}\omega t$ pueden ser nulos, obtenemos:

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \qquad\qquad B = \frac{f_0}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

De donde sacamos que, por ejemplo, para $\omega = \omega_0$, $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ y $B = \dfrac{f_0}{2\gamma\omega_0}$. La solución de la ecuación es $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ donde $x_h(t)$ es la solución de la ecuación del oscilador amortiguado donde vamos a considerar que $\gamma < \omega_0$, por lo que:

$$\boxed{x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t - \delta_1) + B\cos(\omega t - \delta)}$$

Donde a la solución particular se le llama término **estacionario** y a la homogénea, término **transitorio**, pues con el tiempo el término que va a dominar será el estacionario.

Vamos a analizar el comportamiento de B en función de la frecuencia ω, concretamente vamos a buscar la amplitud máxima, la cual coincidirá con el mínimo de la función que está en la raíz del denominador de B:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2\right] = -4\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)\omega + 8\gamma^2\omega$$

Que es nulo para $\omega = 0$, donde B es un mínimo y para $\omega^2 = {\omega_0}^2 - 2\gamma^2$, donde B es un máximo, por lo que vamos a llamar a esta frecuencia **frecuencia de resonancia** $\omega_R = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\gamma^2}$.

3.3. Teoría de osciladores acoplados. Modos normales

Imaginemos dos masas iguales m que están unidas a dos soportes fijos por resortes de constante k y un resorte entre ambas masas k', formando todo el sistema una horizontal. Si llamamos x_1 y x_2 a las posiciones respecto al equilibrio de las masas, tenemos:

$$T = \frac{1}{2}m{\dot{x}_1}^2 + \frac{1}{2}m{\dot{x}_2}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k{x_1}^2 + \frac{1}{2}k{x_2}^2 + \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}k{x_1}^2 + \frac{1}{2}k{x_2}^2 + \frac{1}{2}k'{x_1}^2 + \frac{1}{2}k'{x_2}^2 - k'x_1x_2$$

Por lo que:

$$L = \frac{1}{2}m{\dot{x}_1}^2 + \frac{1}{2}m{\dot{x}_2}^2 - \frac{1}{2}k{x_1}^2 - \frac{1}{2}k{x_2}^2 - \frac{1}{2}k'{x_1}^2 - \frac{1}{2}k'{x_2}^2 + k'x_1x_2$$

Y las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0 \end{cases}$$

Si definimos el centro de masas como la semisuma de las posiciones $x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y la distancia de separación $\Delta x = x_2 - x_1$, como $\ddot{x}_C = \dfrac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2}$ y $\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$, podemos restar y sumar las ecuaciones para obtener:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_C + 2kx_C = 0 \\ m\Delta\ddot{x} + (k+2k')\Delta x = 0 \end{cases}$$

Donde como ya sabemos que:

$$\begin{cases} x_C(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t - \delta_1\right) \\ \Delta x(t) = B\cos\left(\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}t - \delta_2\right) \end{cases}$$

Y como $x_1 = x_C - \dfrac{\Delta x}{2}$ y $x_1 = x_C + \dfrac{\Delta x}{2}$:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}\cos(\omega_1 t - \delta_1) + a_{12}\cos(\omega_2 t - \delta_2) \\ x_2(t) = a_{21}\cos(\omega_1 t - \delta_1) + a_{22}\cos(\omega_2 t - \delta_2) \end{cases}$$

Siendo $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ y $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}$ y $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B/2 \\ A & B/2 \end{pmatrix}$. Vemos que el movimiento implica que $a_{11} = a_{21}$ y $a_{12} = -a_{22}$, es más, si se excita el sistema con alguno de las frecuencias ω_1 o ω_2, el sistema vibrará en una frecuencia "pura". A las diferentes maneras de vibrar se les llama modos, y cuando estos modos son los de una frecuencia "pura", tenemos los llamados **modos normales** o fundamentales, aunque a veces el término **modo fundamental** se reserva para el modo 1. El modo 1 es el obtenido con ω_1, y como en este caso $a_{12} = a_{22} = 0$, es evidente que $x_1(t) = x_2(t)$, por lo que se llama **modo simétrico** también. El modo 2, es evidentemente el **modo antisimétrico** pues esta vez $x_1(t) = -x_2(t)$.

Hemos analizado el caso de dos partículas con misma masa y sometidas a dos fuerzas elásticas iguales, pero el caso se puede generalizar a más partículas distintas, pues como hemos visto, hemos obtenido una solución que matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) \\ \cos(\omega_2 t - \delta_2) \end{pmatrix}$$

Considerando el lagrangiano:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}q_jq_k$$

Donde A y m son matrices simétricas positivas, siendo $A_{jk} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}$. La ecuación de Lagrange queda:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{jk}\ddot{q}_j + A_{jk}q_j = 0$$

Cuya solución sabemos que es de la forma $q_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\cos(\lambda t - \delta_{jk})$, por lo que al sustituir y simplificar obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} -m_{jk}\lambda^2 + A_{jk} = 0 \implies A - \lambda^2 m = 0$$

Que es un problema de diagonalización donde ${\lambda_i}^2$ serán los autovalores y los autovectores serán $\vec{a_i}$. Siendo $\lambda_i = \pm\omega_i$, llegamos a una solución de la forma:

$$\vec{q} = a\vec{\Omega}$$

Donde la componente i de $\vec{q}$ es q_i, a es la matriz con los autovectores $\vec{a_i}$ en columna y $\vec{\Omega}$ otro vector de componentes $\Omega_i = \cos(\omega_i t - \delta_i)$:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) \\ \vdots \\ \cos(\omega_i t - \delta_i) \\ \vdots \\ \cos(\omega_n t - \delta_n) \end{pmatrix}$$

3.4. La cuerda discreta

Vamos a suponer n partículas idénticas atadas con muelles idénticos entre dos soportes, esto es una cuerda discreta[2]. Las partículas tienen masa m y distan una distancia d. Si disponemos la cuerda en dirección X, la posición de la jotaésima partícula será x_j y es $x_j = jd$. Suponiendo que cada partícula sólo puede desviarse de su posición de equilibrio de manera perpendicular al eje X una distancia q_j, la elongación de cada muelle será, por Pitágoras $d_j = \sqrt{d^2 + (q_{j+1} - q_j)^2}$. Así el lagrangiano quedará:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m\dot{q}_j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} k\left[d^2 + (q_j - q_{j-1})^2\right]$$

Donde se definen las partículas en x_0 y x_{n+1} como dos partículas estáticas (el soporte), es decir, $\dot{q}_0 = \dot{q}_{n+1} = 0$. Por lo que podemos poner todo el lagrangiano como un solo sumatorio:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\left[m\dot{q}_j^2 - kd^2 - k(q_j - q_{j-1})^2\right]$$

Y la ecuación del movimiento, teniendo en cuenta que q_j aparece en el término j y en el $j+1$:

$$m\ddot{q}_j + k(q_j - q_{j-1}) - k(q_{j+1} - q_j) = 0 \implies \ddot{q}_j + {\omega_0}^2(-q_{j-1} + 2q_j - q_{j+1}) = 0$$

[2]Marion, J. B. (1992). Dinámica clásica de las partículas y sistemas. Reverté.

Donde ${\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$. Vamos a suponer $q_j = a_j e^{i\omega t}$, con lo que llegamos a:

$$-\omega^2 a_j + {\omega_0}^2(-a_{j-1} + 2a_j - a_{j+1}) = 0 \implies -{\omega_0}^2 a_{j-1} + (2{\omega_0}^2 - \omega^2)a_j - {\omega_0}^2 a_{j+1} = 0$$

Que es un sistema de ecuaciones que verifica el determinante:

$$\begin{vmatrix}
(2{\omega_0}^2 - \omega^2) & -{\omega_0}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-{\omega_0}^2 & (2{\omega_0}^2 - \omega^2) & -{\omega_0}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -{\omega_0}^2 & (2{\omega_0}^2 - \omega^2) & -{\omega_0}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -{\omega_0}^2 & (2{\omega_0}^2 - \omega^2) & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -{\omega_0}^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -{\omega_0}^2 & (2{\omega_0}^2 - \omega^2)
\end{vmatrix} = 0$$

Donde la solución son los modos normales. Está demostrado que la solución exige que:

$$a_j = a e^{i(j\phi - \delta)}$$

Siendo a, $\phi = \phi^*$ y $\delta = \delta^*$ constantes. Sustituimos:

$$-{\omega_0}^2 a e^{i[(j-1)\phi - \delta]} + (2{\omega_0}^2 - \omega^2) a e^{i(j\phi - \delta)} - {\omega_0}^2 a e^{i[(j+1)\phi - \delta]} = 0$$

Lo que se reduce a:

$$-{\omega_0}^2 a e^{ij\phi} e^{-i\phi} e^{-i\delta} + (2{\omega_0}^2 - \omega^2) a e^{ij\phi} e^{-i\delta} - {\omega_0}^2 a e^{ij\phi} e^{i\phi} e^{-i\delta} = 0 \implies$$

$$-{\omega_0}^2 e^{-i\phi} + 2{\omega_0}^2 - \omega^2 - {\omega_0}^2 e^{i\phi} = 0 \implies \omega^2 = {\omega_0}^2 \left(2 - e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right)$$

Donde $2 - e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2(1 - \cos\phi) = 4\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$, por lo que $\omega = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$. Ahora tenemos que la solución es:

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} a_r e^{i(j\phi_r + \omega_r t - \delta_r)}$$

Donde a_r y δ_r vienen determinadas por las condiciones iniciales, pero ϕ_r y en consecuencia ω_r están determinadas por la condición $q_0 = q_{n+1} = 0$. Sin proceder a una demostración exhaustiva, para que la velocidad $\dot{q}_0 = \dot{q}_{n+1} = 0$ sea también nula es lógico que, como $\omega_r = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\phi_r}{2}\right)$, $\phi_r = \dfrac{r\pi}{n+1}$ y $a_{jr} = a_r e^{ij\phi_r} = a_r \operatorname{sen} j\phi_r$, con lo que llegamos a las ecuaciones de la cuerda discreta:

$$\boxed{\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} \cos(\omega_r t - \delta_r)} \\
a_{jr} = a_r \operatorname{sen}(j\phi_r), & \omega_r = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\phi_r}{2}\right), \\
\phi_r = \dfrac{r\pi}{n+1}, & \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}
\end{array}}$$

O de manera compacta:

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} a_r \operatorname{sen}\left(\frac{jr\pi}{n+1}\right) \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) t - \delta_r\right)$$

Donde m es la masa de cada partícula que compone la cuerda, k es la constante de cada resorte, n es el número de partículas y a_r y δ_r son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

3.4.1. La cuerda continua como límite de la discreta

Para realizar el límite haremos que la cuerda tenga infinitas partículas $n \to \infty$, de masa nula $m \to 0$ a una distancia nula $d \to 0$, pero exigiendo que la longitud de la cuerda sea la misma $d(n+1) = l = cte.$ y que la densidad lineal de la cuerda también sea uniforme $\frac{m}{d} = \rho_L = cte.$, además como la cuerda está sometida a la misma tensión τ, la constante del resorte será $k = \frac{\tau}{d}$. Por último consideraremos $x_j = jd \to x$ y $q_j(t) = q(jd,t) \to q(x,t)$ y en consecuencia $\ddot{q} = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$. Plantearemos la ecuación del movimiento:

$$m\ddot{q}_j + k(q_j - q_{j-1}) - k(q_{j+1} - q_j) = 0 \to m\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} + k(q(x) - q(x-d)) - k(q(x+d) - q(x)) = 0$$

Que dividiendo entre d y tomando el límite:

$$\frac{m}{d}\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} + k\left[\frac{(q(x) - q(x-d))}{d} - \frac{(q(x+d) - q(x))}{d}\right] = 0 \to$$

$$\rho_L\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} + k\left[\lim_{d\to 0}\frac{(q(x) - q(x-d))}{d} - \lim_{d\to 0}\frac{(q(x+d) - q(x))}{d}\right] = 0 \implies$$

$$\rho_L\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} + k\left[\frac{\partial q(x-d)}{\partial x} - \frac{\partial q(x)}{\partial x}\right] = 0 \implies \rho_L\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} - k\left[\frac{\partial q(x)}{\partial x} - \frac{\partial q(x-d)}{\partial x}\right] = 0$$

Donde con una nueva sustitución y otro límite llegamos a:

$$\rho_L\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} - \frac{\tau}{d}\left[\frac{\partial q(x)}{\partial x} - \frac{\partial q(x-d)}{\partial x}\right] = 0 \implies \rho_L\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} - \tau\lim_{d\to 0}\frac{\frac{\partial q(x)}{\partial x} - \frac{\partial q(x-d)}{\partial x}}{d} = 0 \implies$$

$$\rho_L\frac{\partial^2 q(x)}{\partial t^2} - \tau\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = 0$$

Lo que nos lleva a la ecuación de onda de la cuerda:

$$\boxed{\rho_L\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \tau\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}$$

Es interesante ver que el lagrangiano se define como:

$$L = \int_l \left[\frac{1}{2}\rho_L\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] dx = \int_l \mathcal{L} dx$$

Donde $\mathcal{L}$ es la **densidad lagrangiana** para la cual se cumple la ecuación de Lagrange para medios continuos:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}$$

Tema 4

Ondas

Una onda es la propagación de una perturbación de una propiedad del espacio en el tiempo con **transporte de energía** y **sin transporte de materia**. Como hemos visto, la ecuación de ondas en una dimensión será:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Donde v es una constante (que veremos que corresponde con la velocidad de propagación de la onda) que en la cuerda vibrante es $v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_L}}$, en una barra elástica es $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho_V}}$[1] y en ondas electromagnéticas es $v = c$, por ejemplo. En tres dimensiones la ecuación de ondas se extiende de la forma:

$$\boxed{\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0}$$

4.1. Solución general

En una dimensión es sencillo hacer el cambio de variable $p = x - vt$ y $q = x + vt$ de manera que[2] $\psi_{xx} = \psi_{pp} + 2\psi_{pq} + \psi_{qq}$ y $\psi_{tt} = v^2\psi_{pp} - 2v^2\psi_{pq} + v^2\psi_{qq}$, por lo que la ecuación queda:

$$\psi_{pq} = 0$$

Cuya solución es una función arbitraria de p sumada a otra de q:

$$\psi(p,q) = f(p) + g(q) \implies \boxed{\psi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)}$$

Lo que es una suma de dos ondas que se propagan con dirección v hacia la derecha ($f(x-vt)$) y hacia la izquierda ($g(x+vt)$).

4.2. Soluciones particulares

Ahora vamos a analizar ciertos casos particulares de la solución de ondas que son útiles y habituales.

[1] Y: módulo de Young; ρ_V: densidad volumétrica

[2] $\Psi_\mu = \frac{\partial\Psi}{\partial\mu}$

4.2.1. Condiciones en un extremo

Supongamos una cuerda semiinfinita atada en uno de sus extremos, como resulta evidente, el hecho de estar atada impide el movimiento de dicho extremos, por lo que si el extremos está en $x = 0$ tenemos como condición que $\psi(0, t) = 0$ en todo instante. Para ello:

$$\psi(0, t) = f(-vt) + g(vt) = 0 \implies f(-vt) = -g(vt)$$

En consecuencia:

$$\psi(x, t) = f(x - vt) - f(-(x + vt))$$

Donde tenemos una onda reflejada. Una solución muy importante es cuando $f(\theta) = Be^{ik\theta}$ pues una superposición de estas soluciones[3], por el teorema de Fourier, puede describir cualquier onda periódica. Así:

$$\psi(x, t) = B\left(e^{ik(x-vt)} - e^{-ik(x+vt)}\right) = B\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t} = A \operatorname{sen}(kx)e^{-i\omega t}$$

Donde $A = 2Bi$ y $\omega = kv$. Si el extremo está libre, se tiene que la fuerza sobre ese punto es la tensión por el seno del ángulo que está formando con la horizontal (suponemos que no existe movimiento horizontal) $\tau \operatorname{sen}\theta = 0$ que es igual a 0 pues el sumatorio de las fuerzas es igual a la masa por la aceleración pero en un punto de la cuerda la masa es nula, pero como el ángulo es pequeño puede aproximarse a la tangente, la fuerza será $\tau \tan\theta = \tau \operatorname{lím}_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta x} = \tau \dfrac{\partial q}{\partial x}$, por lo que la condición será:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Lo que dará la solución en cosenos, en general la solución será una combinación de ambos:

$$\boxed{\psi(x, t) = Ce^{i(kx \pm \omega t)}}$$

Donde la onda reflejada no será la misma que la emitida. Si se trata de otro tipo de ondas estas condiciones tendrán que "traducirse", e.g. en un tubo de sonido, considerando ondas de presión, la condición de "cuerda atada" corresponde con extremo abierto, pues la la diferencia de presión con la atmosférica ha de ser nula. En cualquier caso hay una periodicidad[4] en x dada por los puntos desfasados en 2π:

$$kx_1 - kx_2 = 2\pi \implies k(x_1 - x_2) = k\lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Donde λ es la **longitud de onda** y k recibe el nombre de **número de onda** (puede interpretarse como una frecuencia en el espacio). Obviamente existe una periodicidad temporal pues:

$$\omega t_1 - \omega t_2 = \pi \implies \omega(t_1 - t_2) = \omega T = 2\pi \implies \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donde T es el **período**, el inverso de la **frecuencia** ν de la onda ($\omega = 2\pi\nu$). Las periodicidades están relacionadas pues $v = \dfrac{\omega}{k} = \lambda\nu = \dfrac{\lambda}{T}$.

El hecho de estar la "cuerda" atada en un extremo, o su análogo en otro tipo de ondas, genera una reflexión como ya vimos. Se conoce como **coeficiente de reflexión** al cociente de la intensidad de

[3]esta es la conocida como solución de Bernoulli y se puede obtener mediante el método de separación de variables.
[4]la periodicidad es patente pues tanto temporalmente como espacialmente existe una fase angular.

la onda emitida entre la reflejada, si este coeficiente es ± 1 significa que la energía se conserva, si es menor (en valor absoluto) que uno, implica que existen fuerzas no conservativas que han disipado la energía (como el rozamiento).

Para los casos donde la energía se conserva tenemos, por ejemplo el caso anterior de $\psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kx)e^{-i\omega t}$. En esta onda existen ciertos puntos $x = p$ especiales llamados **nodos**, donde la cuerda no vibra para ningún t:

$$\psi(p,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kp)e^{-i\omega t} = 0 \implies kp = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esas posiciones son $p = \dfrac{n\pi}{k} = n\dfrac{\lambda}{2}$, es decir, múltiplos enteros de las semilongitudes de onda. Los puntos que cumplen $(2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$ se conocen como **antinodos** o **vientres** y es donde la amplitud de la onda es siempre máxima.

4.2.2. Condiciones en dos extremos

Volviendo a las ondas sinusoidales en la cuerda, si atamos los dos extremos obtenemos que la condición es $q(x=0,t) = q(x=L,t) = 0$, por lo que la solución es sencilla si consideramos que en $x = l$ tiene que haber un nodo, es decir:

$$l = n\frac{\lambda}{2} \implies \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

Donde ahora las longitudes de onda están discretizadas, sólo puede tomar ciertos valores "cuantizados".

Las condiciones en los extremos pueden ser variadas, por ejemplo, uno fijo y el otro libre, ambos libres, uno fijo y el otro con rozamiento, etc. donde cada caso necesita de estudio particular.

4.3. Velocidades de fase y de grupo. Dispersión

Vamos a considerar una onda que se propaga a la derecha $\psi(x,t) = Ce^{i(kx-\omega t)}$, donde vemos claramente que tiene una fase $kx - \omega t$, es evidente que la misma fase $kx - \omega t = \theta$, es decir, $d\theta = 0$ verifica $kdx - \omega dt = 0$, por lo que dicha fase se mueve a una velocidad que llamaremos velocidad de fase v_f:

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Que coincide con la velocidad de propagación v en la cuerda vibrante. El problema resulta de ciertos medios en los que la velocidad de propagación depende de k, $v = v(k)$. Veamos el caso de la cuerda discreta, donde ya sabemos que $\omega_r = 2\sqrt{\dfrac{\tau}{\rho_L}}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{r\pi}{2(n+1)}\right)$ y que $l = d(n+1)$ por lo que:

$$\frac{r\pi}{2(n+1)} = \frac{rd\pi}{2d(n+1)} = \frac{rd\pi}{2l} = \frac{d\pi}{\lambda_r}$$

Pues $\lambda_r = \dfrac{2l}{r}$, ahora cambiando $k_r = \dfrac{2\pi}{\lambda_r}$ tenemos:

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau d}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k_r d}{2}\right)$$

Si consideramos una situación estacionaria, un modo puro $\omega = \omega_r$ y $k = k_r$:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2\sqrt{\frac{\tau d}{m}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}\right)}{k} = d\sqrt{\frac{\tau d}{m}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}\right)}{\left(\frac{kd}{2}\right)}$$

Por lo que $v = v(k)$, la cuerda discreta es un medio dispersivo.

Se llama así **onda dispersiva** a aquella cuya velocidad depende de su longitud y número de onda ($v = v(k) \Leftrightarrow v = v(\lambda)$). Esto indica que cada armónico va a su velocidad. La **relación de dispersión** es la frecuencia en función del número de onda: $\omega = \omega(k)$. La solución más general será una combinación lineal de todos los posibles armónicos, por lo que cada perturbación elemental tendrá su velocidad. Vamos a suponer dos ondas sencillas (cosenos de amplitud unidad)

$$\psi_1(x,t) = \cos(k_1 x - \omega_1 t) \qquad \text{y} \qquad \psi_2(x,t) = \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

La superposición de ambas ondas será:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Si definimos un número de onda y una frecuencia medias, $\bar{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ y $\bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, y la diferencia, $\Delta k = k_1 - k_2$ y $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, así:

$$\psi = \cos\left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] =$$
$$= \cos\left[(\bar{k}x - \bar{\omega}t) + \left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] + \cos\left[(\bar{k}x - \bar{\omega}t) - \left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] =$$
$$= \cos(\mu + \delta) + \cos(\mu - \delta) = \cos\mu\cos\delta - \operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\delta + \cos\mu\cos\delta + \operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\delta =$$
$$= 2\cos\mu\cos\delta = 2\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Que será el producto de dos ondas, y suponiendo que k_1 y k_2, así como ω_1 y ω_2 están próximos, es decir $\bar{k} \gg \Delta k$ y $\bar{\omega} \gg \Delta\omega$, la onda se verá como una onda de frecuencia $\bar{\omega}$ con una intensidad variable, que varía con frecuencia $\Delta\omega$. La envolvente se moverá con una velocidad $v = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Así para cualquier onda, un paquete de ondas se moverá con dicha velocidad que llamaremos **velocidad de grupo** v_g:

$$v_g = \lim_{\Delta k \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

La velocidad de grupo coincide con la velocidad de fase cuando $\omega = v_f k$ siendo $v_f = cte.$, es decir, hay dependencia lineal:

$$v_g = \frac{d(v_f k)}{dk} = v_f$$

Si la velocidad de fase varía con k, es decir, el medio es dispersivo, la relación será:

$$v_g = \frac{d(v_f k)}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

Donde hemos utilizado que:

$$\frac{df}{dk} = \frac{df}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = \frac{df}{d\lambda}\left(-\frac{2\pi}{k^2}\right) = -\frac{df}{d\lambda}\frac{\lambda}{k} \implies k\frac{df}{dk} = -\lambda\frac{df}{d\lambda}$$

Existen tres tipos de medios según la dispersión:

- $\dfrac{dv_f}{d\lambda} > 0 \implies v_f > v_g$: medio con **dispersión normal**.
- $\dfrac{dv_f}{d\lambda} = 0 \implies v_f = v_g$: medio **sin dispersión**.
- $\dfrac{dv_f}{d\lambda} < 0 \implies v_f < v_g$: medio con **dispersión anómala**.

4.4. Descomposición espectral de las ondas

La manera más general de poner una onda que se propague hacia la derecha es una combinación lineal de todos los armónicos:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

Que en caso de tener los extremos fijos o existir alguna condición está perfectamente definida, pero en general, k no está discretizado, por lo que vamos a considerar $k_n \to k$, $\omega_n \to \omega(k)$ y para las amplitudes vamos a considerarlas unitarias, es decir $A_n \to A(k)\Delta k$, por lo que haciendo el límite $\Delta k \to 0$ obtenemos[5]:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk$$

La fracción previa a la integral está por normalización. Si conocemos la relación de dispersión $\omega(k)$, que depende sólo del medio, la onda se puede reconstruir conociendo la función $A(k)$, por lo que es equivalente que nos den $\psi(x,0)$ que $A(k)$ pues sabemos como va a evolucionar la onda en el tiempo. Así a la función $A(k)$ se la conoce como espectro de la onda, y es la **transformada de Fourier** de $\psi(x,0)$:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0) e^{-ikx} dx$$

Y al proceso inverso se le conoce como la **transformada inversa de Fourier**:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-ikx} dx$$

4.4.1. Transformada de un armónico

Si la onda es un modo puro, es decir, $\psi(x,0) = e^{ik_0 x}$, la transformada será:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0 x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x} dx = \sqrt{2\pi}\,\delta(k-k_0)$$

Donde $\delta(k-k_0)$ es la delta de Dirac[6] centrada en k_0, por lo que todos los modos son nulos salvo el $k = k_0$.

[5] nótese el cambio de signo en el exponente, por convención

[6] $\delta(k-k_0) = \begin{cases} \infty, & k = k_0, \\ 0, & k \neq k_0 \end{cases}$

4.5. Ondas en tres dimensiones

La ecuación de ondas ya dijimos que se puede extender a tres dimensiones como:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Establecer una solución general es complicado, pero existen casos particulares que son sencillos de estudiar y útiles.

4.5.1. Ondas planas

Si se soluciona la ecuación de ondas en coordenadas cartesianas la solución cumple:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Que por separación de variable podemos suponer una solución $\psi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$, con lo que al sustituir y dividir entre ψ obtenemos:

$$\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{Z}}{Z} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T}$$

Donde para que se cumpla la igualdad vamos a exigir que cada cociente sea igual a una constante ($-{k_x}^2$ para X, $-{k_y}^2$ para Y, $-{k_z}^2$ para Z y $-\omega^2$ para T) y además las constante cumplan que:

$${k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

Así tenemos cuatro ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{X} + {k_x}^2 X = 0 \\ \ddot{Y} + {k_y}^2 Y = 0 \\ \ddot{Z} + {k_z}^2 Z = 0 \\ \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son conocidas pues son cuatro osciladores:

$$\begin{cases} X = A_1 e^{ik_x x} + B_1 e^{-ik_x x} \\ Y = A_2 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} \\ Z = A_3 e^{ik_z z} + B_3 e^{-ik_z z} \\ T = A_0 e^{i\omega t} + B_0 e^{-i\omega t} \end{cases}$$

De entre todas las posible soluciones $\psi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ nos interesa particularmente para la cual $A_1 = A_2 = A_3 = B_0 = \sqrt[4]{A}$ y $B_1 = B_2 = B_3 = A_0 = 0$:

$$\psi(x,y,z,t) = Ae^{ik_x x}e^{ik_y y}e^{ik_z z}e^{-i\omega t} = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Si consideramos que si $k_x = k$ y $k_y = k_z = 0$ siendo k una constante positiva tenemos una onda que se propaga en sentido $+X$, si $k_x = -k$ y $k_y = k_z = 0$, dicha onda se propaga en $-X$, siguiendo el mismo razonamiento para Y y Z podemos ver que k_x, k_y y k_z pueden verse como las componentes cartesianas de un vector paralelo a la dirección de propagación. Definimos así un vector $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ que cumple que $k^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$. Entonces la onda queda:

$$\boxed{\psi(\vec{r},t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$$

A este tipo de onda se le llama **onda plana** pues es una onda donde una perturbación es la misma en cada uno de los planos perpendiculares al vector $\vec{k}$.

4.5.2. Ondas esféricas

En coordenadas esféricas la ecuación queda mucho más complicada pues el laplaciano es mucho más aparatoso:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Pero haremos la hipótesis de que una onda generada en un punto en un medio isotrópico no depende de θ ni de φ por lo que la ecuación se simplifica enormemente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Ahora bien, si desarrollamos:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}$$

Y la ecuación de ondas queda:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \implies \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = 0$$

Siendo la ecuación de ondas monodimensional, cuya solución conocida es:

$$r\psi = Ae^{i(kr-\omega t)} \implies \psi = \frac{A}{r}e^{i(kr-\omega t)}$$

Donde tenemos la ecuación de la **onda esférica**:

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{A}{r}e^{i(kr-\omega t)}}$$

4.5.3. Ondas cilíndricas

Por último en coordenadas cilíndricas tenemos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Donde si suponemos una función $\psi = \psi(\rho,t)$, podemos simplificar la expresión de la ecuación:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \implies \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Donde probaremos la solución separable $\psi(\rho,t) = P(\rho)T(t)$ y obtenemos:

$$\frac{\ddot{P}}{P} + \frac{1}{\rho}\frac{\dot{P}}{P} - \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = 0$$

Donde debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \rho\ddot{P} + \dot{P} + \rho k^2 P = 0 \\ \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \end{cases}$$

Por lo que:

$$T(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Pero $P(\rho)$ no tiene solución analítica en general, en cambio si $k = 1$, es decir $\omega = v$, la ecuación de P se puede escribir como:

$$\rho^2\ddot{P} + \rho\dot{P} + (\rho^2 - \alpha^2)P = 0, \qquad \alpha = 0$$

Que es la ecuación de Bessel cuya solución son las funciones de Bessel como el polinomio de primera especie:

$$J_\alpha(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

Donde, como $\Gamma(n+1) = n!$, para nuestro caso de $\alpha = 0$, la solución será:

$$P(\rho) = J_0(\rho) = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}$$

Hemos tratado los polinomios de Bessel de primera especie (J_α), pero también existen otras funciones de Bessel como los polinomios de Bessel de segunda especie (Y_α), por lo que nuestra solución será una combinación lineal de las diferentes funciones de Bessel $P(\rho) = AJ_0(\rho) + BY_0(\rho)$. Exigiendo $A = iB$, las funciones de Bessel tienden asintóticamente ($\rho \gg \frac{1}{4}$) a:

$$P(\rho) \simeq A\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{i\rho} = \frac{\tilde{A}}{\sqrt{\rho}}e^{i\rho}$$

Forzando a que $T(t) = Be^{-ivt}$ para tener cierta analogía con otro tipo de ondas, se puede resumir que una onda cilíndrica se comporta como:

$$\psi(\rho,t) \simeq \frac{C}{\sqrt{\rho}}e^{i(\rho - vt)}$$

Que podemos intentar forzar la existencia de una k para obtener:

$$\boxed{\psi(\rho,t) \simeq \frac{C}{\sqrt{\rho}}e^{i(k\rho - \omega t)}}$$